

Trabajo de Fin de Máster

**Combinando tecnologías de guerra en la
Estrategia de Conquista**

Máster en Física y Tecnologías Físicas

Autor:

Jorge Morón Vidal

Tutores:

Laura Hernández

Luis Mario Floría Peralta



Universidad
Zaragoza

Facultad de ciencias

2018/2019

Resumen

El objetivo de este trabajo es profundizar en la teoría sobre estrategias de conquista. Se analiza el modelo propuesto por Sanjeev Goyal permitiendo la combinación de tecnologías en dos escenarios distintos y se exploran sus implicaciones recurriendo a métodos numéricos cuando se agota la vía analítica. Finalmente se aplica uno de los escenarios desarrollados a una red y se analiza superficialmente su evolución.

The aim of this work is to deepen in the strategy of contest' s theory. The war model proposed by Sanjeev Goyal is studied with the improvement of allowing the combination of two technologies in two different scenarios. The implications of this modifications are explored using computational methods when nothing else can be obtained analytically. Finally, one of the hypothetical combination of technologies is applied to make a network evolve.

Índice

1. Introducción	1
2. Modelo de guerra propuesto por Goyal	1
2.1. Las funciones de éxito en una contienda	2
2.2. Dos tipos de tecnologías	4
2.3. Secuencias de ataque	5
2.4. Aplicación del simulated annealing a la guerra propuesta por Goyal	7
2.5. Secuencias definidas sobre la red de estrella	9
2.5.1. Con tecnologías que recompensan al rico	10
2.5.2. Con tecnologías que recompensan al pobre	10
3. Combinando tecnologías	12
3.1. Guerra mixta con sistema de pagos A	13
3.1.1. Definición de juego	13
3.1.2. Equilibrio de Nash	14
3.1.3. Existencia del equilibrio de Nash	15
3.2. Búsqueda analítica del equilibrio de Nash en la guerra mixta con sistema de pagos A	15
3.3. Guerra mixta con sistema de pagos B	17
3.4. Búsqueda computacional del equilibrio de Nash en la guerra mixta con sistema de pagos B	18
4. La guerra mixta en una red	23
4.1. Evolución de una red de propietarios bajo la guerra mixta con sistema de pagos B	23
4.2. Red de Erdos-Renyi	24
5. Conclusiones y futuros pasos	27
A. Reflexión sobre el concepto de tecnología	29
B. Herramientas de cálculo computacional	30

1. Introducción

Lo que caracteriza a la física no es el tipo de fenómenos y problemas objeto de su estudio algo que, de hecho, es muy cambiante en el tiempo. Lo que es genuino en ella es el modo directo, eficaz y profundo que emplea en entender y resolver cualquier problema que aborda. En esta línea de pensamiento, en este trabajo abordamos el estudio de la teoría sobre conflictos armados desde el punto de vista de un físico.

La guerra y la estrategia militar son una cuestión muy transversal académicamente. Hasta ahora, estos temas han sido tratados desde las perspectivas de la psicología, la economía, la historia, la estadística, etc. En su trabajo, Goyal [12] propone estudiar los conflictos armados mediante un modelo matemático sencillo pero de implicaciones profundas. Esta memoria gira en torno a la discusión y expansión de este modelo que mis tutores y yo hemos llevado a cabo en este último curso haciendo uso de nuestros conocimientos en física computacional, sistemas dinámicos, cálculo estocástico, teoría de juegos y redes complejas.

Se comienza con un breve comentario del modelo original de Goyal tras el que se introduce un análisis de un aspecto de éste haciendo uso de métodos de Montecarlo. A continuación, se aumenta la complejidad del modelo dando lugar a un juego a partir del cual se construye un sistema dinámico que se caracteriza y , en la última fase de este trabajo, se implementa en una red. El fuerte carácter no lineal de las ecuaciones que dominan la dinámica derivada del juego propuesto lo hacen analíticamente intratable. Recurrimos entonces para su análisis al uso de métodos numéricos para lo cual se han desarrollado una serie de programas en *C*, *Python* y *Mathematica* que pueden encontrarse en un repositorio adjunto en el Apéndice B

2. Modelo de guerra propuesto por Goyal

Se parte del modelo de guerra propuesto en [12], el cual se construye sobre una red conexa $G = \langle V, L \rangle$ donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ $n \geq 2$ es el conjunto de vértices o reinos y $L = \{uv : u, v \in V, u \neq v\}$ el de enlaces o accesos entre ellos. Así pues, si existe un enlace entre los vértices u y v se dirá que el reino v tiene acceso al reino u . A cada vértice $v_i \in V$ le acompaña una variable que representa el valor los recursos $r_i \in \mathbb{R}_{++}$ asociados a dicho reino.

Al inicio de la guerra, a cada uno de los vértices se le asigna un propietario perteneciente al conjunto $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ mediante la función propiedad ¹ \mathbb{O} . Dos propietarios o_i y o_j serán vecinos si existen $v_i \in \mathbb{O}^{-1}(o_i)$ y $v_j \in \mathbb{O}^{-1}(o_j)$ tal que $v_j v_i \in L$ se dice en este caso que o_j tiene acceso a o_i y viceversa². Dos propietarios podrán batallar entre sí si son vecinos. Un propietario

¹Esta función no es biyectiva ya que el modelo contempla que un propietario pueda poseer más de un vértice

²Esto es consecuencia de que la red considerada es no dirigida

o_i tiene recursos con valor R_i bajo acción de la función de propiedad \mathbb{O} definidos como

$$R_i = \sum_{v \in \mathbb{O}^{-1}(o_i)} r_v \quad (1)$$

i.e. un propietario tiene recursos iguales a la suma de los recursos de todos los reinos que posee.

Las probabilidades de victoria de un propietario sobre otro cuando estos se enfrentan en un combate vienen dadas por un tipo especial de funciones llamadas CSF ³ rigurosamente axiomatizadas en [13]. Dichas probabilidades dependen tanto de los recursos de ambos propietarios como del tipo de tecnología que usen para combatir.

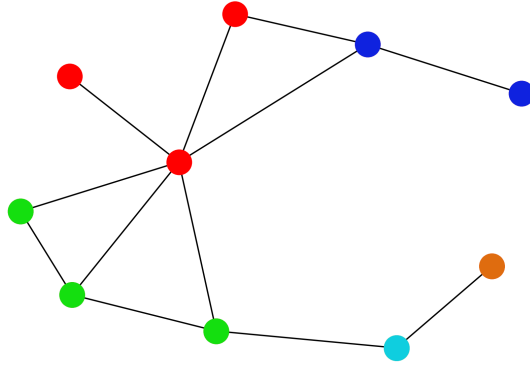


Figura 2.1: Red ejemplo de diez reinos en la que se pueden distinguir cinco propietarios distintos, cada uno de ellos representado mediante un color. En esta realización del sistema, el propietario rojo tiene acceso al propietario verde pero no lo tiene al propietario naranja.

2.1. Las funciones de éxito en una contienda

El objetivo de las CSF es calcular la probabilidad de victoria en función del esfuerzo (o en nuestro caso, cantidad de recursos) invertido por los contendientes implicados en un concurso o batalla. Estas funciones han sido aplicadas con éxito en la modelización de un amplio rango de fenómenos (elecciones, búsqueda de alquileres, conflictos...) en el marco de las ciencias sociales. En lo consiguiente denotaremos como p_i a la probabilidad de victoria del propietario o_i y nos referiremos al conjunto de los recursos de los propietarios como $R = \{R_1, \dots, R_N\}$

Las propiedades de las CSF se imponen mediante 7 axiomas [13]:

1. $\sum_{o_i \in O} p_i(R) = 1$ y $p_i(R) \geq 0$ para todo $o_i \in O$. Además, si $R_i > 0$ entonces $p_i(R) > 0$.
2. Para todo $o_i \in O$, $p_i(R)$ debe ser creciente con R_i y decreciente con R_j para todo $j \neq i$.

³Abreviación de *Contest Success Functions*, término que podemos traducir al español como "Funciones de éxito en una contienda"

3. Las p_i deben quedar invariantes bajo una permutación π sobre los o_i .

$$p_{\pi(i)}(R) = p_i(\pi(R))$$

4. Si un subconjunto M de O inicia una guerra interna sin tener en cuenta al resto de jugadores, la probabilidad de ganar p_{iM} del jugador $i \in M$ será

$$p_{iM}(R) = \frac{p_i(R)}{\sum_{j \in M} p_j(R)}. \quad (2)$$

5. $p_{iM}(R)$ no depende de los recursos de los propietarios fuera de M .

$$p_{iM}(R) = p_{iM}(R_M). \quad (3)$$

donde R_M es la restricción de R a los propietarios pertenecientes a M .

6. Las p_i son homogéneas de orden 0⁴.

$$p_i(\lambda \cdot R) = p_i(R). \quad (4)$$

7. Las $p_i(R, \mathbb{O})$ son invariantes bajo adición de un $c \in \mathbb{R}$ de los recursos de todos los propietarios.

$$p_i(R + c) = p_i(R) \quad (5)$$

Los axiomas 1-3 garantizan que las $p_i(R)$ se definen de acuerdo con la teoría de la probabilidad, que invertir más recursos siempre favorece la victoria y que la función $p_i(R)$ va a ser invariante bajo permutación de los propietarios⁵. Los tres combinados permiten garantizar que la probabilidad de ganar para cada propietario vendrá dada por el mismo tipo de función.

El axioma 4 refuerza la consistencia de la teoría imponiendo que los conflictos entre subgrupos de propietarios sean cualitativamente similares a los aquellos en los que pueda estar implicada la totalidad de O . Por otra parte, el axioma 5 hace hincapié sobre que las opciones irrelevantes no intervienen en las probabilidades que conciernen al conflicto. El cumplimiento de los axiomas 1-5 puede imponerse de manera no trivial suponiendo una función $f(x)$ tal que $\frac{df(x)}{dx} > 0$ sea cual sea x y haciendo uso de ella para definir $p_i(R)$ como

$$p_i(R) = \frac{f(R_i)}{\sum_{j \in O} f(R_j)}. \quad (6)$$

Para garantizar el cumplimiento del axioma 6 basta con hacer que las funciones f sean de la forma $f(x) = \alpha \cdot x^m$ con $\alpha > 0$ y $m > 0$. Si se quisiera además cumplir el axioma 7⁶, entonces

⁴Definimos

⁵En un lenguaje más coloquial se puede decir que la función probabilidad es anónima ya que no importa quién sea el propietario de los recursos, sólo su magnitud

⁶Este axioma es motivo de discusión por las consecuencias que tiene cuando c es grande. De hecho, en el caso que se discute en esta memoria, se va a utilizar una CSF que no lo cumple.

$f(x) = e^{k \cdot x}$. En lo consiguiente, la CSF que se utilizará será la función de éxito de Tullock para dos propietarios que no cumplen el axioma 7 de modo que la probabilidad de que o_i gane una batalla contra o_j dependa del cociente $\frac{R_i}{R_j}$ en lugar de la diferencia $R_i - R_j$

$$p_i^\gamma(R_i, R_j) = p_i^\gamma(R_i, R_j) = \frac{R_i^\gamma}{R_i^\gamma + R_j^\gamma} = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_j}{R_i}\right)^\gamma} \quad (7)$$

con $\gamma > 0$. Gracias al hecho de que todas las probabilidades vienen dadas por el mismo tipo de función, se puede prescindir de los subíndices. La información sobre a la victoria de qué propietario se refiere una función dada vendrá codificada en el orden de los argumentos de ésta

$$p_i^\gamma = p^\gamma(R_i, R_j) \quad p_j^\gamma = p^\gamma(R_j, R_i) \quad (8)$$

2.2. Dos tipos de tecnologías

En este modelo, considerando que la guerra no tiene costes, si el jugador o_i gana una batalla contra o_j , o_i pasará a poseer los recursos y los reinos que antes eran de o_j y si pierde, o_i quedará sin recursos ni reinos. Haciendo uso de (7) se puede definir la ganancia esperada $u_i(R_i, R_j)$ de la batalla para el jugador o_i como

$$u_i(R_i, R_j) = (R_i + R_j) p(R_i, R_j) \quad (9)$$

que puede re-escribirse como

$$u_i(R_i, R_j) = \frac{(R_i + R_j)}{1 + \left(\frac{R_j}{R_i}\right)^\gamma} = R_i \cdot \frac{1 + \frac{R_j}{R_i}}{1 + \left(\frac{R_j}{R_i}\right)^\gamma} \quad (10)$$

Para que la batalla sea favorable para el propietario o_i se debe cumplir que

$$u_i(R_i, R_j) > R_i \iff \frac{1 + \frac{R_j}{R_i}}{1 + \left(\frac{R_j}{R_i}\right)^\gamma} > 1 \iff 1 > \left(\frac{R_j}{R_i}\right)^{\gamma-1} \quad (11)$$

en función del parámetro γ se distinguen dos situaciones o, como Goyal las llama, tecnologías:

- Si $\gamma > 1$ entonces (11) se cumplirá cuando $R_i > R_j$. En este caso, la función de Tullock modela una batalla en la que se emplea una tecnología que recompensa al propietario más rico. Un enfrentamiento entre dos ejércitos es un ejemplo de batalla con tecnología que recompensa al rico.
- Si $\gamma < 1$, la condición (11) se hará efectiva en los casos en los que $R_i < R_j$. Se habla en este supuesto de tecnología que recompensa al propietario más pobre. La guerrilla, los asedios, el terrorismo o los ataques nucleares formarían parte de este tipo de tecnologías.

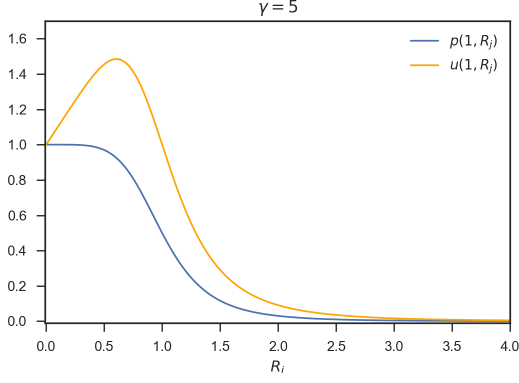


Figura 2.2: Evolución de la probabilidad $p^\gamma(R_i, R_j)$ y la recompensa esperada $u_\gamma(R_i, R_j)$ en función de R_j para $R_i = 1$ y $\gamma = 5$

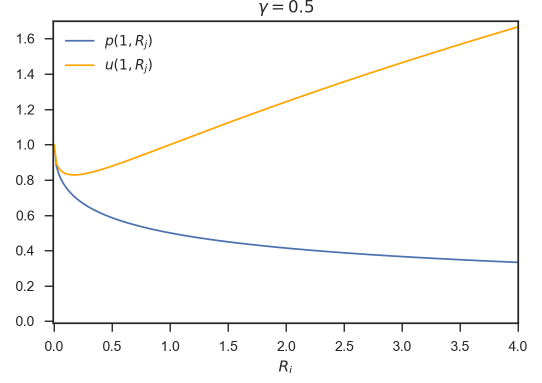


Figura 2.3: Evolución de la probabilidad $p_\gamma(R_i, R_j)$ y la recompensa esperada $u_\gamma(R_i, R_j)$ en función de R_j para $R_i = 1$ y $\gamma = 0.5$

El tipo de tecnología empleada en las batallas es un factor determinante en la dinámica de la guerra.

2.3. Secuencias de ataque

Una de las características del modelo de Goyal es que los propietarios pueden elegir si luchan o no y contra quién lo hacen. Se supone una guerra en la que la tecnología que se está usando es aquella que recompensa al rico, es decir $\gamma > 1$. De la convexidad estricta de la función x^γ con $\gamma > 1$ se deriva que

$$(R_i + R_j)^\gamma > R_i^\gamma + R_j^\gamma \quad (12)$$

se multiplica a ambos lados de (12) por $(R_i + R_l)^\gamma$ y se aplica de nuevo la convexidad de x^γ por la que $(R_i + R_j)^\gamma > R_i^\gamma + R_j^\gamma$ entonces

$$(R_i + R_j)^\gamma (R_i + R_l)^\gamma > (R_i + R_j)^\gamma R_l^\gamma + (R_i + R_j)^\gamma R_i^\gamma \quad (13)$$

y sumando a ambos lados $R_i^\gamma (R_i + R_j)^\gamma$ se obtiene

$$(R_i + R_j)^\gamma (R_i^\gamma + (R_j + R_l)^\gamma) > (R_i^\gamma + R_j^\gamma) ((R_i + R_j)^\gamma + R_l^\gamma) \quad (14)$$

finalmente, se reordenan los términos a ambos lados y se multiplica a toda la ecuación por R_i^γ

$$\left(\frac{R_i^\gamma}{R_i^\gamma + R_j^\gamma} \right) \left(\frac{(R_i + R_j)^\gamma}{(R_i + R_j)^\gamma + R_l^\gamma} \right) > \frac{R_i^\gamma}{R_i^\gamma + (R_j + R_l)^\gamma} \quad (15)$$

que equivale a escribir

$$p^\gamma(R_i, R_j) \cdot p^\gamma(R_i + R_j, R_l) > p(R_i, R_j + R_l) \quad (16)$$

lo que significa que, para el caso en el que se considera una tecnología que recompensa al rico, la probabilidad de ganar una sucesión de batallas contra dos adversarios o_j y o_l es mayor que la de ganar contra el ganador de una batalla anterior entre o_j y o_l . Dicho de otro modo, las tecnologías que recompensan al adversario rico penalizan el esperar a que el resto de propietarios luchen entre sí.

Si por el contrario se considera el uso de tecnologías pobres i.e. $\gamma < 1$ el primer paso de un desarrollo análogo sería, basándose ahora en la estricta concavidad de x^γ con $\gamma < 1$

$$(R_i + R_j)^\gamma < R_i^\gamma + R_j^\gamma \quad (17)$$

procediendo de manera idéntica a como se hizo con (12) se llega a que, en este caso

$$p(R_i, R_j) \cdot p(R_i + R_j, R_l) < p(R_i, R_j + R_l) \quad (18)$$

es decir, la probabilidad de ganar a dos adversarios mediante combates usando tecnologías que recompensan al pobre es mayor cuando se espera a que dichos adversarios combatan entre sí en lugar de intentar vencerlos uno a uno antes de que luchen entre ellos. En el caso que $\gamma = 1$ se dice que la tecnología es de recompensa neutral.

Se define el conjunto de propietarios activos $Act(O)$ de un sistema como aquellos propietarios que poseen algún reino⁷

$$Act(O) = \{i \in O \text{ tal que } \emptyset \not\subseteq \mathbb{O}^{-1}(i)\} . \quad (19)$$

En una realización de la guerra de Goyal, en cada turno uno de los propietarios activos obtiene la iniciativa para atacar a sus vecinos. Si gana contra uno de ellos, se queda con sus recursos y sus reinos y continúa luchando. Si pierde, pierde sus recursos y sus reinos y deja de ser considerado un propietario activo. Se define la secuencia de ataque S como el conjunto ordenado propietarios activos que sigue el propietario o_i cuando éste recibe la iniciativa de ataque

$$S = \{o_j \in A \text{ tal que } o_i \text{ tiene acceso a } o_j\} . \quad (20)$$

La probabilidad de que el propietario que tiene la iniciativa en una guerra o_0 complete una secuencia S de m elementos viene dada por

$$p_S^\gamma(R_1, \dots, R_m) = \prod_{k=1}^m p^\gamma \left(\sum_{j=1}^{k-1} R_j, R_k \right) . \quad (21)$$

⁷Equivalentemente, este conjunto es el de propietarios O_a con cantidad recursos $R_a > 0$ para todos los $o_a \in Act(O)$.

También podemos definir la ganancia esperada de dicha secuencia de ataque como.

$$u_S(R_1, \dots, R_m) = \left(\sum_{i=1}^m R_i \right) \cdot p_S(R_1, \dots, R_m) \quad (22)$$

La búsqueda del máximo de (22) no es un problema trivial cuando $N_P > 2$ donde N_P es el número de propietarios activos ya que para ello, debemos calcular el máximo absoluto de una función con multitud de máximos locales. Además, el número de secuencias posibles N_S para una red con N_P propietarios será

$$N_S = \sum_{j=1}^{N_P-1} j!. \quad (23)$$

que para una red con $N_P = 10$ da $N_S = 409113$ por lo que, aunque el número de secuencias sea contable y las secuencias distinguibles entre sí, no será demasiado rentable computacionalmente compararlas todas. Se debe entonces recurrir a métodos más refinados para realizar este cálculo.

2.4. Aplicación del simulated annealing a la guerra propuesta por Goyal

Para aplicar el simulated annealing a este problema, recordamos en primer lugar que, en el formalismo canónico de la mecánica estadística, la probabilidad *prob* de encontrar a un sistema con temperatura T en un microestado con etiqueta s dada una función de energía $U(s)$ definida sobre el conjunto de microestados es

$$prob(s, T) = \frac{e^{\frac{-U(s)}{k_B T}}}{\sum_S e^{\frac{-U(s)}{k_B T}}}. \quad (24)$$

En los casos en los que no es posible el cálculo analítico de la función de partición $Z = \sum_S e^{\frac{-U(s)}{k_B T}}$ podemos hacer uso de métodos de Monte Carlo para simular numéricamente la evolución temporal del sistema. Uno de los algoritmos que forma parte de estos métodos es el de Metrópolis-Hastings (25) en el cual, la probabilidad de aceptar un estado S' partiendo de un estado S viene dada por la función

$$prob(s \rightarrow s') = \min \left(1, \frac{prob(s', T)}{prob(s, T)} \right) = \min \left(1, \exp \left(\frac{U(s) - U(s')}{K_B T} \right) \right) \quad (25)$$

es decir, si el cambio de estado es energéticamente favorable el nuevo estado siempre se acepta y si no lo es, se acepta con probabilidad $\frac{prob(s', T)}{prob(s, T)}$. Cuanto más alta es la temperatura, con mayor probabilidad se aceptan cambios de estado energéticamente desfavorables mientras que, a temperatura nula, sólo los cambios energéticamente favorables pueden tener lugar

El simulated annealing consiste en ir haciendo descender progresivamente la temperatura del sistema mientras se le hace evolucionar mediante un proceso de Monte Carlo sin esperar a que

termalice⁸. El papel de la temperatura es el de controlar las fluctuaciones del sistema de forma que, cuando ésta sea alta, el sistema podrá fluctuar a través de microestados desfavorables en términos de la energía con el fin de llegar hasta la región en la que se encuentren los microestados que minimizan U . Al bajar la temperatura, disminuye la magnitud de las fluctuaciones de manera que se espera que el estado final que se alcance sea un mínimo absoluto de $U(s)$. Identificando $U(s) = -u_s$ siendo S una secuencia de ataque e interpretando la temperatura T como un parámetro que regula los errores que comete el propietario a la hora de establecer la mejor secuencia de ataque, podemos calcular las S que maximizan u_s .

El algoritmo⁹ que utilizamos para ello aparece explicado en pseudo-código en 1 donde la variable N_{iter} representa el número de iteraciones del algoritmo (25), N_{adm} da cuenta del número máximo de secuencias que pueden ser admitidas por el algoritmo de Metrópolis para cada temperatura y T_{min} es la temperatura mínima que alcanza el sistema en el simulated annealing.

Algorithm 1 Simulated annealing

```

1: procedure SIMULATED ANNEALING
2:
3:    $T \leftarrow$  temperatura inicial ( $T < 1$ )
4:    $S \leftarrow$  secuencia inicial (aleatoria)
5: bucle 1:
6:    $int \leftarrow 0$ 
7:    $s_{adm} \leftarrow 0$ 
8: bucle 2:
9:   if  $int < N_{iter}$  then
10:    if  $s_{adm} < N_{adm}$  then
11:       $S' \leftarrow$  permute ( $S$ )
12:       $S \leftarrow$  metropolis ( $S, S', T$ )
13:      if  $S' \neq S$  then
14:         $s_{adm} \leftarrow s_{adm} + 1$ 
15:         $int \leftarrow int + 1$ 
16:      ir a bucle 2.
17:   if  $T > T_{min}$  then
18:      $T = T^2$ 
19:   ir a bucle 1.
20: resultado  $S$ 

```

En el algoritmo 1 se hace además uso de dos procesos.

- **permute** es una función que escoge dos elementos aleatorios distintos de la secuencia S e intercambia sus posiciones para definir una nueva secuencia que se almacena en la variable S' .

⁸Decimos que un sistema ha termalizado cuando las configuraciones generadas por el proceso de Monte Carlo son independientes de la configuración inicial del sistema.

⁹Debido lo que se busca es maximizar una función cuyo valor depende del orden en el que demos unos determinados pasos, el algoritmo 1 está inspirado en la realización del simulated annealing de [11] para resolver el problema del viajante.

- **metropolis** Es una versión del algoritmo de Metropolis-Hastings adaptada a nuestro caso de estudio.

Algorithm 2 metropolis

```

1: procedure METROPOLIS
2:
3:    $S \leftarrow \text{antigua secuencia}$ 
4:    $S' \leftarrow \text{nueva secuencia}$ 
5:    $T \leftarrow \text{temperatura}$ 
6:
7:    $u_{\text{antigua}} = u_s(S)$ 
8:    $u_{\text{nueva}} = u_s(S')$ 
9:
10:  if  $u_{\text{nueva}} > u_{\text{antigua}}$  then
11:    return  $S'$ 
12:  cierra
13:  if numero aleatorio  $\in [0, 1] < \exp\left(\frac{u_{\text{nueva}} - u_{\text{antigua}}}{T}\right)$  then
14:    devuelve  $S'$ 
15:  devuelve  $S$ 

```

2.5. Secuencias definidas sobre la red de estrella

En teoría de redes complejas se denomina motif a un patrón o subgrafo con una topología característica que se repite con frecuencia [9] en este caso, un motif cuya dinámica Goyal analiza exhaustivamente es el de la red de estrella. Haciendo uso de los algoritmos presentados en el apartado anterior repetimos el cálculo de las secuencias de ataque para esta topología.

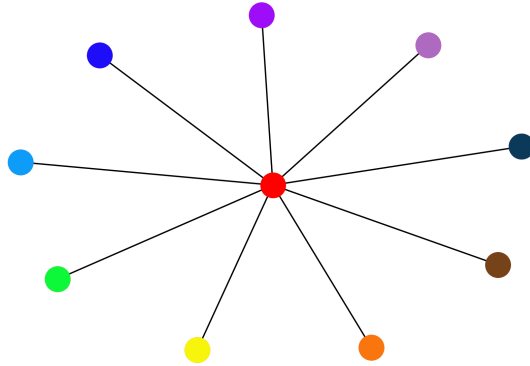


Figura 2.4: Red de estrella de diez nodos. En nuestras simulaciones, el nodo central es el que tiene la iniciativa de ataque. Los colores de los nodos representan el propietario, antes de que la guerra comience, de cada nodo.

La distribución de recursos considerada en este caso es una distribución plana en la que cada uno de los propietarios de la periferia tiene asociado un valor de recursos del 1 al 9. El nodo central tiene recursos $R_{\text{central}} = 2$.

2.5.1. Con tecnologías que recompensan al rico

En [12] se deduce que usando tecnología de guerra que recompensa al rico, la secuencia que optimiza el valor esperado de los recursos es aquella que recorre los nodos disponibles en cada turno siguiendo un orden creciente de recursos. En dicha secuencia, todos los pasos son provechosos para el contendiente central (11). Además, la propiedad de no espera(16) propicia que el propietario con iniciativa realice la secuencia de ataque completa ¹⁰ en una sola guerra. Dado que la red de propietarios es definida conexas, si un propietario tiene éxito en todos los pasos de la realización de una de estas secuencias, el resultado será una red hegemónica en la que un propietario posee todos los reinos.

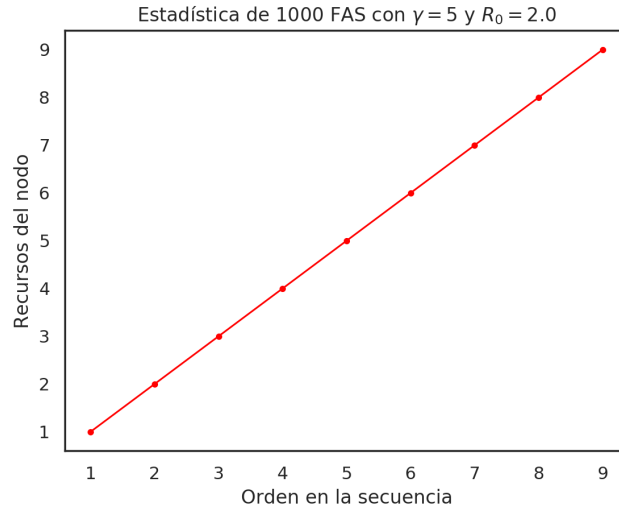


Figura 2.5: Realización de 1 para $\gamma = 5$ con la topología de red y distribución de recursos descritos al inicio del apartado. La totalidad de las 1000 secuencias obtenidas se corresponden con la predicha en [12] lo cual incita al uso del simulated annealing para este tipo de problemas.

2.5.2. Con tecnologías que recompensan al pobre

Las secuencias de ataque completas son características de las guerras que usan tecnologías que recompensan al rico. Usando tecnologías que recompensan al pobre y debido a (16), las posibles secuencias óptimas son las secuencias de ataque cortas¹¹ en las cuales sólo se recorren una fracción los nodos a los que el propietario con iniciativa tiene acceso.

Aplicando simulated annealing se encuentra que las secuencias de toda longitud posible dentro de la red de estrella que optimizan el valor de los recursos esperados de (22) son:

¹⁰ *Full Attacking Sequences* en inglés. En [12] se usan sus siglas FAS.

¹¹ *Short Attacking Sequences* en inglés. En [12] se usan sus siglas SAS.

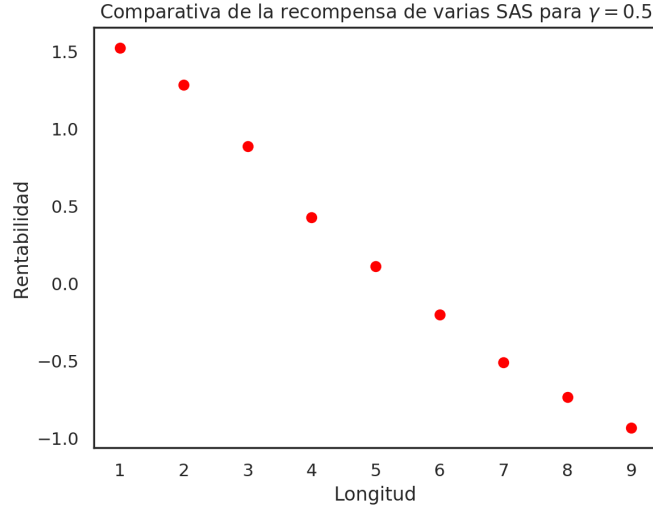


Figura 2.6: Rentabilidad definida como $u_i(S) - R_i$ de la realización de secuencias de distinta longitud que optimizan el valor esperado de los recursos encontradas mediante el algoritmo 1 para $\gamma = 0.5$. En base a este resultado, al propietario del nodo central la secuencia que más le conviene es aquella en la que ataca a un solo propietario. Cuando se consideran longitudes superiores a 5, todas secuencias posibles serán desfavorables en términos de la rentabilidad ya que la secuencia óptima calculada con el simulated annealing lo es.

Longitud	Secuencia óptima de ataque
1	{9}
2	{9, 8}
3	{9, 8, 1}
4	{9, 8, 7, 1}
5	{9, 8, 7, 2, 1}
6	{9, 8, 7, 6, 2, 1}
7	{9, 8, 7, 6, 3, 2, 1}
8	{9, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1}
9	{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}

Figura 2.7: Orden de los recursos de los nodos a atacar en las secuencias óptimas de varias longitudes cuya rentabilidad se representa en 2.6. Las secuencia son, para todas las longitudes, descendientes en el orden de los recursos de los nodos que las componen. Llama la atención que las secuencias que maximizan los pagos y no recorren todos los nodos disponibles prefieran omitir los nodos con valor de recursos intermedio.

3. Combinando tecnologías

En su trabajo, Goyal supone que en la guerra los propietarios emplean o bien tecnologías que recompensan al rico, o bien tecnologías que recompensan al pobre. Sin embargo, dada su interpretación de las tecnologías, nada impediría a los propietarios disponer de ambas y elegir cuál de ellas usar a la hora de enfrentarse a sus rivales.

Cabe entonces preguntarse si es posible expandir el modelo presentado en los apartados anteriores al caso en el que los propietarios son capaces de mezclar las tecnologías que emplean en la guerra. Para ello, se introduce una nueva variable $\alpha_i \in [0, 1]$ que representa la fracción de recursos que el propietario o_i destina a la guerra rica siendo trivialmente $1 - \alpha_i$ la fracción de recursos que se invierte en la guerra pobre

Sean dos propietarios o_i y o_j con recursos de valor R_i y R_j respectivamente que combaten paralelamente en dos frentes

- Un frente RR en el que se batalla con tecnología que recompensa al rico $\gamma > 1$ y en el cual la probabilidad de victoria del propietario o_i contra el propietario o_j $p_{RR}^\gamma(\alpha_i R_i, \alpha_j R_j)$ vendrá dada por una función de Tullock (7) con $\gamma > 1$
- Un frente RP en el que se batalla con tecnología que recompensa al pobre y en el cual la probabilidad de victoria del propietario o_i contra el propietario o_j $p^{\gamma'}((1 - \alpha_i) R_i, (1 - \alpha_j) R_j)$ vendrá dada por una función de Tullock (7) con $\gamma' < 1$

En base a este planteamiento, distinguimos cuatro posibles resultados de un conflicto a los cuales asociamos su respectiva probabilidad definida como

- Caso A: El propietario o_i gana tanto en el frente RR como en el RP

$$Prob(A) = p^\gamma(\alpha_i R_i, \alpha_j R_j) p^{\gamma'}((1 - \alpha_i) R_i, (1 - \alpha_j) R_j) . \quad (26)$$

- Caso B: El propietario o_i gana en el frente RR pero pierde en el RP

$$Prob(B) = p^\gamma(\alpha_i R_i, \alpha_j R_j) \left[1 - p^{\gamma'}((1 - \alpha_i) R_i, (1 - \alpha_j) R_j) \right] . \quad (27)$$

- Caso C: El propietario o_i pierde en el frente RR pero gana en el RP

$$Prob(C) = [1 - p^\gamma(\alpha_i R_i, \alpha_j R_j)] p^{\gamma'}((1 - \alpha_i) R_i, (1 - \alpha_j) R_j) . \quad (28)$$

- Caso D: El propietario o_i pierde tanto en el frente RR como en el RP

$$Prob(D) = [1 - p^\gamma(\alpha_i R_i, \alpha_j R_j)] \left[1 - p^{\gamma'}((1 - \alpha_i) R_i, (1 - \alpha_j) R_j) \right] . \quad (29)$$

En lo consiguiente, se definen dos modelos en función de qué pago se le asocia a cada uno de los casos.

3.1. Guerra mixta con sistema de pagos A

Para definir los pagos asociados a cada caso, se plantea el supuesto de que cuando un propietario o_i gane en ambos frentes, éste recibe como pago la totalidad de los recursos del otro propietario o_j y que, si gana en un frente pero pierde en el otro, los recursos de ambos quedan intactos. Con este planteamiento y las definiciones (26)-(29) el valor esperado de recursos u_i^A para el propietario o_i tras un enfrenamiento será

$$u_i^A(R_i, \alpha_i, R_j, \alpha_j, \gamma, \gamma') = \text{Prob}(A)(R_i + R_j) + (\text{Prob}(B) + \text{Prob}(C))R_i \quad (30)$$

y el del propietario o_j

$$u_j^A(R_i, \alpha_i, R_j, \alpha_j, \gamma, \gamma') = \text{Prob}(D)(R_i + R_j) + (\text{Prob}(B) + \text{Prob}(C))R_j \quad (31)$$

En el contexto de una sucesión de conflictos, cuando se produce una victoria en un frente y una derrota en el otro, la batalla se repite de nuevo dado que no ha habido cambios en sus recursos y las mismas razones que les llevaron a luchar la primera vez les llevarán a hacerlo una segunda. Este hecho, evaluado con rigor, trae consigo unas implicaciones que atañen a la naturaleza misma de las tecnologías tal y como se plantean en [12]. Dichas implicaciones se discuten en el Anexo A

En todo caso, el objetivo de ambos propietarios cuando combatan entre sí será encontrar el α_i que maximice su recompensa esperada [12]. Suponiendo que ambos conocen los recursos propios y los de su adversario, el sistema adquiere las características de un juego de información completa.

3.1.1. Definición de juego

Un juego es, desde el punto de vista matemático, una representación formal en la cual un número de individuos interactúan en un ajuste de interdependencia estratégica de manera que el bienestar de cada uno no depende sólo de sus acciones sino también de las acciones de los otros[7]. En teoría de juegos, un juego en forma estratégica G puede ser caracterizado mediante tres elementos[3] $G = \{\mathcal{I}, \mathcal{E}, U\}$

- Un conjunto finito de jugadores $i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, I\}$.
- Un espacio finito o infinito de estrategias puras para cada jugador \mathcal{E}_i . Al espacio formado por todas las estrategias puras de todos los jugadores que participan en el juego se le denomina \mathcal{E} .

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_I\} \quad (32)$$

Se le llama perfil de estrategias E a un conjunto que se forma tomando una estrategia de cada jugador¹² $e_i \in \mathcal{E}_i$.

$$E = \{e_1, \dots, e_I\} \text{ tal que } e_i \in \mathcal{E}_i \quad (33)$$

- Una función u que asocia un pago a cada jugador dado un perfil de estrategias

$$u(E) = \{u_1(e_1, e_2, \dots, e_I), u_2(e_1, e_2, \dots, e_I), \dots, u_I(e_1, e_2, \dots, e_I)\} \quad (34)$$

Así pues, el conjunto de jugadores \mathcal{I} se identifica con el conjunto de propietarios implicados en el conflicto $\{o_i, o_j\}$; el conjunto de estrategias puras \mathcal{E} , con los posibles valores de $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ y las utilidades, por el valor esperado de los recursos tras el conflicto (30) (31).

Una de las ventajas de definir el problema haciendo uso del formalismo de la teoría de juegos es que se puede usar el teorema de Von Neuman-Morgernstern [7] para argumentar que lo que van a utilizar ambos propietarios en un conflicto son estrategias para las cuales el valor esperado de sus recursos tras la batalla sea máximo.

3.1.2. Equilibrio de Nash

Se dice que un perfil de estrategias E_N es un equilibrio de Nash si ningún jugador encuentra incentivo alguno en desviarse unilateralmente de él, formalmente [3]

$$E_N = \{e_1, e_2, \dots, e_I\} \text{ tal que } u_i(e_i, e_{-i}) \geq u_i(e'_i, e_{-i}) \forall \{e_i, e_{-i}\} \in E_N, e'_i \notin E_N. \quad (35)$$

Los algoritmos que buscan calcular el equilibrio de Nash requieren también de la definición del concepto de mejor respuesta. Se considera que una estrategia de un jugador e_i es mejor respuesta cuando optimiza la utilidad de dicho jugador respecto a un perfil de estrategias E_{-i} del resto de jugadores

$$e_i \text{ mejor respuesta} \leftrightarrow u(e_i, e_j) \geq u(e'_i, e_j) \forall e_j \in E_{-i} \text{ tal que } e'_i \neq e_i \quad (36)$$

Una estrategia pura que no sea mejor respuesta no puede tomar parte en un equilibrio de Nash.[3]

El equilibrio de Nash es el perfil de estrategias que seguirán los jugadores cuando sean totalmente racionales ya que sólo en este caso podemos asegurar que ambos maximizan simultáneamente su utilidad. Esta implicación es importante de cara al análisis posterior en el que se va a suponer que los propietarios obran siempre racionalmente.

¹²Se pueden también definir perfiles de estrategias restringidos a un subconjunto de jugadores. Por ejemplo, posteriormente se hablará del perfil de estrategias E_{-i} el cual se compone de estrategias de todos los jugadores salvo el jugador i .

3.1.3. Existencia del equilibrio de Nash

Para demostrar la existencia de un equilibrio de Nash en juegos con espacio de estrategias continuo se debe, en primer lugar, definir una función

$$\beta_i : E_{-i} \longrightarrow E_i$$

$$\beta_i(E_{-i}) = e_i \text{ tal que } e_i \text{ es mejor respuesta a } E_{-i} \quad (37)$$

Gracias a β podemos redefinir el equilibrio de Nash E_N como el perfil de estrategias en el que, para todos sus elementos $e_i^N \in E_N$ se cumple que

$$e_i^N \in \beta(E_N - i) \quad (38)$$

dicho de otro modo: Los puntos fijos del sistema dinámico definido por la iteración sucesiva de β serán equilibrios de Nash.

Para demostrar que el equilibrio de Nash existe, se prueba la existencia un punto fijo en el sistema dinámico definido por la iteración sucesiva de β . Recurrimos para ello a la aplicación del teorema de Kakutani [5] según el cual, para que un sistema dinámico definido sobre un conjunto tenga un punto fijo se deben cumplir las siguientes condiciones

- E debe de ser un conjunto cerrado, convexo y compacto
- $\beta(E)$ debe de ser un grafo cerrado.
- El conjunto $\beta(E)$ es convexo y no-vacío para todo $e^i \in E$

La última condición requiere que la función recompensa u_i sea cóncava[10] para todo i . Esto es un requisito que (30) y (31) no cumplen. Por lo tanto, habrá situaciones en las que no exista equilibrio de Nash.

3.2. Búsqueda analítica del equilibrio de Nash en la guerra mixta con sistema de pagos A

Para que la estrategia α_i del propietario o_i sea mejor respuesta a la estrategia α_j del propietario o_j ésta debe maximizar la función¹³ $u_i^A(R_i, \alpha_i, R_j, \alpha_j, \gamma, \gamma')$. Son susceptibles de ser máximo absoluto los máximos locales de u_i^A así como los valores extremos $u_i^A(\alpha_i = 0)$ y $u_i^A(\alpha_i = 1)$. En el caso en el que el máximo absoluto se identifique con un máximo relativo, el punto fijo de β

¹³En lo consiguiente, se omitirán las dependencias de u_i^A con respecto a R_i , R_j , γ y γ' . También se simplificará la notación $p^\gamma(\alpha_1 R_1, \alpha_2 R_2) = p^\gamma$ y $p^\gamma((1 - \alpha_1) R_1, (1 - \alpha_2) R_2) = p^\gamma$

estará en:

$$\begin{cases} \frac{du_i^A}{d\alpha_i} = 0 & \frac{d^2u_i^A}{d\alpha_i^2} < 0 \\ \frac{du_j^A}{d\alpha_j} = 0 & \frac{d^2u_j^A}{d\alpha_j^2} < 0 \end{cases} . \quad (39)$$

Imponiendo simultáneamente la condición de mejor respuesta en ambas funciones, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{du_i^A}{d\alpha_i} = \frac{Prob(A)}{\alpha_i} (R_i + R_j) + \left(\frac{Prob(B)}{\alpha_i} + \frac{Prob(C)}{\alpha_i} \right) R_i \\ \frac{du_j^A}{d\alpha_j} = \frac{Prob(D)}{\alpha_j} (R_i + R_j) + \left(\frac{Prob(C)}{\alpha_j} + \frac{Prob(B)}{\alpha_j} \right) R_j \end{cases} \quad (40)$$

que haciendo uso de

$$\begin{aligned} \frac{dp^\gamma (\alpha_i R_i, \alpha_j R_j)}{d\alpha_i} &= \frac{dp^\gamma}{d\alpha_i} = \frac{\gamma}{\alpha_i} p^\gamma (1 - p^\gamma) \\ \frac{dp^{\gamma'} ((1 - \alpha_i) R_i, (1 - \alpha_j) R_j)}{d\alpha_i} &= \frac{dp^{\gamma'}}{d\alpha_i} = \frac{\gamma'}{1 - \alpha_i} p^{\gamma'} (p^{\gamma'} - 1) \\ \frac{dp^\gamma (\alpha_i R_i, \alpha_j R_j)}{d\alpha_j} &= \frac{dp^\gamma}{d\alpha_j} = \frac{\gamma}{\alpha_j} p^\gamma (p^\gamma - 1) \\ \frac{dp^{\gamma'} ((1 - \alpha_i) R_i, (1 - \alpha_j) R_j)}{d\alpha_j} &= \frac{dp^{\gamma'}}{d\alpha_j} = \frac{\gamma'}{1 - \alpha_j} p^{\gamma'} (1 - p^{\gamma'}) \end{aligned} \quad (41)$$

da lugar a que, en el perfil de estrategias asociado al equilibrio de Nash $\{\alpha_i^*, \alpha_j^*\}$

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha_i^*} p^\gamma (1 - p^\gamma) [(1 - p^\gamma) R_i + p^{\gamma'} R_j] + \frac{\gamma'}{1 - \alpha_i^*} p^{\gamma'} (1 - p^{\gamma'}) [(1 - p^{\gamma'}) R_i + p^\gamma R_j] = 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha_j^*} p^\gamma (1 - p^\gamma) [(1 - p^\gamma) R_i + p^{\gamma'} R_j] + \frac{\gamma'}{1 - \alpha_j^*} p^{\gamma'} (1 - p^{\gamma'}) [(1 - p^{\gamma'}) R_i + p^\gamma R_j] = 0 \end{cases} \quad (42)$$

que podemos reescribir del siguiente modo

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha_i^*} f_i(\alpha_i^*, \alpha_j^*) + \frac{\gamma'}{1 - \alpha_i^*} f_j(\alpha_i^*, \alpha_j^*) = 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha_j^*} f_i(\alpha_i^*, \alpha_j^*) + \frac{\gamma'}{1 - \alpha_j^*} f_j(\alpha_i^*, \alpha_j^*) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\alpha_i^*}{1 - \alpha_i^*} = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{f_i(\alpha_i^*, \alpha_j^*)}{f_j(\alpha_i^*, \alpha_j^*)} \\ \frac{\alpha_j^*}{1 - \alpha_j^*} = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{f_i(\alpha_i^*, \alpha_j^*)}{f_j(\alpha_i^*, \alpha_j^*)} \end{cases} . \quad (43)$$

Como $\frac{f_i(\alpha_i^*, \alpha_j^*)}{f_j(\alpha_i^*, \alpha_j^*)}$ es monótona en el intervalo $[0, 1]$ se concluye que, considerando a ambos propietarios racionales, un posible equilibrio de Nash bajo las condiciones impuestas al principio del apartado implica que

$$\alpha_i^* = \alpha_j^* = \alpha^* . \quad (44)$$

Si ahora definimos la función

$$q(R_i, \alpha_i^*, R_j, \alpha_j^*, \gamma, \gamma') = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{f_i(\alpha_i^*, \alpha_j^*)}{f_j(\alpha_i^*, \alpha_j^*)} \quad (45)$$

entonces el valor de α^*

$$\alpha^* = \frac{q(R_i, \alpha_i^*, R_j, \alpha_j^*, \gamma, \gamma')}{1 + q(R_i, \alpha_i^*, R_j, \alpha_j^*, \gamma, \gamma')} . \quad (46)$$

La ecuación (46), aunque fuertemente no lineal, puede ser resuelta mediante métodos numéricos [3.1](#)

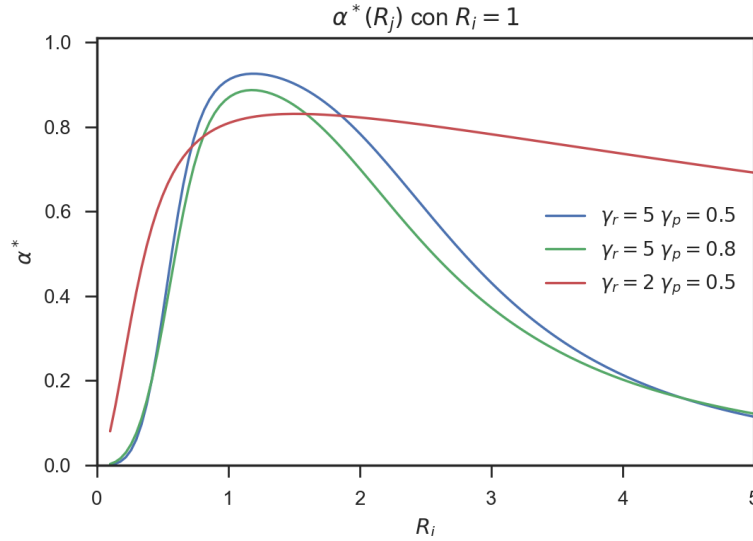


Figura 3.1: Soluciones de (46) en función de R_2 . Éstas se han conseguido haciendo uso del código *N_linear.nb* que puede encontrarse en el repositorio incluido en el Anexo [B](#)

3.3. Guerra mixta con sistema de pagos B

En el caso de la guerra mixta con sistema de pagos B, el ganador en cada uno de los frentes obtiene el total invertido por ambos jugadores en ese frente de manera que los valores esperados de los recursos tras una batalla serán

$$u_i^B(R_i, \alpha_i, R_j, \alpha_j, \gamma, \gamma') = Prob(A)(R_i + R_j) + (\alpha_i \cdot R_i + \alpha_j \cdot R_j) Prob(B) +$$

$$((1 - \alpha_i) \cdot R_i + (1 - \alpha_j) \cdot R_j) \text{Prob}(C) \quad (47)$$

y para el oponente

$$u_j^B(R_i, \alpha_i, R_j, \alpha_j, \gamma, \gamma') = \text{Prob}(D)(R_i + R_j) + (\alpha_i \cdot R_i + \alpha_j \cdot R_j) \text{Prob}(C) +$$

$$((1 - \alpha_i) \cdot R_i + (1 - \alpha_j) \cdot R_j) \text{Prob}(B) \quad (48)$$

e imponiendo de nuevo que

$$\frac{du_i^B}{d\alpha_i} = 0$$

$$\frac{du_j^B}{d\alpha_j} = 0 \quad (49)$$

llegamos, en un proceso muy similar al que hemos seguido en el caso con sistema de pagos A, al siguiente sistema de ecuaciones no polinómicas acopladas

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{\alpha_i^*} q_1 - \frac{\gamma'}{1-\alpha_i^*} q_2 + x_1 q_3 &= 0 \\ \frac{\gamma}{\alpha_j^*} q_1 - \frac{\gamma'}{1-\alpha_j^*} q_2 + x_2 q_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

en el que

$$q_1 = q_1(R_i, \alpha_i, R_j, \alpha_j, \gamma, \gamma') = p^\gamma (1 - p^\gamma) [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2]$$

$$q_2 = q_2(R_i, \alpha_i, R_j, \alpha_j, \gamma, \gamma') = p^{\gamma'} (1 - p^{\gamma'}) [(1 - \alpha_1) x_1 + (1 - \alpha_2) x_2] \quad (51)$$

$$q_3 = p^\gamma - p^{\gamma'}$$

De estas ecuaciones se puede obtener que, para $R_i = R_j$ se deberá cumplir que $\alpha_i^* = \alpha_j^* = \alpha^*$ dado que ese caso y debido al axioma 3, el jugador o_i es indistinguible del jugador o_j respecto a las funciones de Tullock. Entonces $p^\gamma = p^{\gamma'}$ y las dos ecuaciones restantes dan lugar a la misma expresión que en (46).

3.4. Búsqueda computacional del equilibrio de Nash en la guerra mixta con sistema de pagos B

La mayor parte de los algoritmos desarrollados previamente para encontrar equilibrios de Nash trabajan sobre juegos cuyo conjunto de estrategias puras[4][2] que o tienen un número finito de elementos, o la función $u_i(E)$ garantiza la existencia de un equilibrio de Nash.

Dado que el equilibrio de Nash se ha definido como un punto fijo de la función β , estudiaremos

nuestro sistema a través del map derivado de la iteración sucesiva de β

$$\{\alpha_i^{t+1}, \alpha_j^{t+1}\} = \{\beta_i(\alpha_j^t), \beta_j(\alpha_i^t)\} \quad (52)$$

el algoritmo que reproducen los programas que se han desarrollado para el cálculo del equilibrio de Nash es el siguiente

Algorithm 3 Equilibrio de Nash

```

1: procedure EQUILIBRIO DE NASH
2:
3:    $\alpha_i^t \leftarrow 0.5$ 
4:    $\alpha_j^t \leftarrow 0.5$ 
5:    $int \leftarrow 0$ 
6: bucle
7:    $\alpha_i^{t+1} \leftarrow \beta_i(\alpha_j^t)$ 
8:    $\alpha_j^{t+1} \leftarrow \beta_j(\alpha_i^t)$ 
9:   if  $|\alpha_i^{t+1} - \alpha_i^t| < \epsilon$  then
10:    if  $|\alpha_j^{t+1} - \alpha_j^t| < \epsilon$  then
11:      devuelve  $\alpha_j^{t+1} \alpha_i^{t+1}$ 
12:    cierra
13:   if  $int < max\_int$  then
14:      $int \leftarrow int + 1$ 
15:   ir a bucle
16: else
17:   No existe equilibrio de Nash
18: cierra

```

Algunos detalles sobre el algoritmo 3:

1. Los valores iniciales de α_i y α_j son irrelevantes ya que, en nuestro caso además de un punto fijo el equilibrio de Nash es una atractor cuya región de atracción bajo acción de (52) es todo el espacio de estrategias E .
2. β_i es una función que se encarga de buscar el valor de α_i que maximiza u_i^B encontrando los máximos relativos ¹⁴ de $u_i^B(\alpha_i)$ y comparándolos con los valores de $u_i^B(\alpha_i = 0)$ y $u_i^B(\alpha_i = 1)$. Podría haberse usado un simulated annealing de nuevo pero era menos eficiente en términos de tiempo y, de cara a simular más adelante una dinámica de red, la rapidez es un valor importante.
3. El valor de ϵ representa la tolerancia a la hora de distinguir un ciclo de un punto fijo. Idealmente tendríamos $\epsilon = 0$ pero numéricamente los puntos fijos perfectos no existen. En nuestro caso, $\epsilon = 2 * \epsilon_\beta$ donde ϵ_β es la precisión con la que se estima el máximo.

¹⁴Numéricamente se exploró el número de máximos que podíamos encontrar en $u_i^B(\alpha_i)$ para varias combinaciones $1 < \gamma < 10$ y $0 < \gamma' < 1$ haciendo uso de *n_max.c* y se encontró que sólo existía, como mucho, un máximo relativo en $u_i^B(\alpha_i)$ y $u_j^B(\alpha_j)$.

El diagrama cobweb [14] es un método que permite interpretar mediante un análisis geométrico muy sencillo el comportamiento de un map. Para hacerlo, en primer lugar iteramos (52) sobre sí mismo de manera que la evolución de α_i sólo dependa de α_i y la de α_j , de α_j

$$\{\alpha_i^{t+2}, \alpha_j^{t+2}\} = \{\beta_i(\beta_j(\alpha_i^t)), \beta_j(\beta_i(\alpha_j^t))\} \quad (53)$$

A continuación, representamos gráficamente (53) junto con la recta de pendiente 1 tal y como se muestra en 3.2

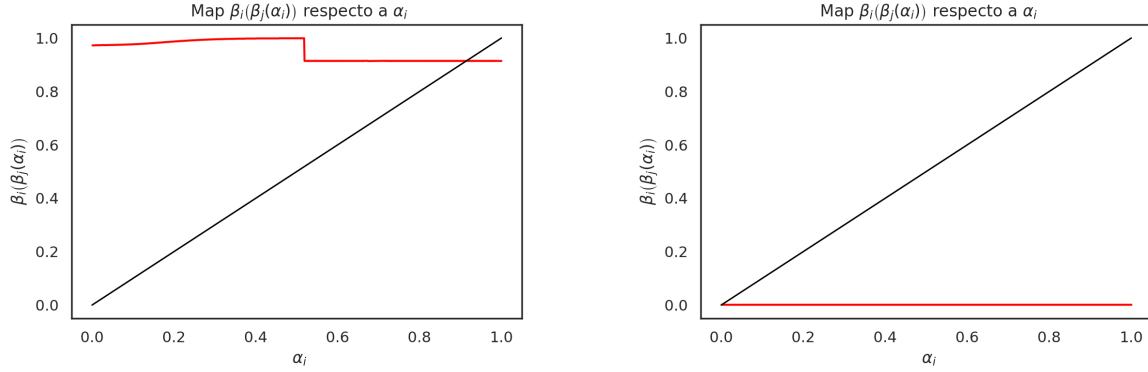


Figura 3.2: Representación gráfica del map (53) para $R_i = 1$, $R_j = 0.5$, $\gamma = 5$ y $\gamma' = 0.5$ y de las rectas $\alpha_i = \alpha_i$ y $\alpha_j = \alpha_j$ respectivamente.

El diagrama cobweb se construye del siguiente modo ¹⁵:

1. Comenzamos en $(\alpha_i^0, 0)$ sobre el eje de abcisas.
2. Nos desplazamos verticalmente hasta alcanzar un punto de la gráfica del map (α_i^0, α_i^1) (línea roja en la figura 3.2).
3. Desde (α_i^0, α_i^1) , nos movemos horizontalmente hasta un punto sobre $\alpha_i = \alpha_i$ (línea negra en la figura 3.2) que será (α_i^1, α_i^1)
4. Repetimos 2 empezando desde el punto (α_i^1, α_i^1) .

Los puntos fijos de (53) serán aquellos para los que

$$\{\alpha_i^*, \alpha_j^*\} = \{\beta_i(\beta_j(\alpha_i^*)), \beta_j(\beta_i(\alpha_j^*))\} \quad (54)$$

es decir, allí donde se crucen la recta $\alpha_i = \alpha_i$ con (53) o, desde otro punto de vista, los lugares en los las órbitas producidas mediante el algoritmo del diagrama cobweb quedan atrapadas. Dichos puntos serán, por ser puntos fijos, equilibrios de Nash. Como $\alpha_i = \alpha_i$ solo se cruza una vez con (53), se puede decir que solo existe un equilibrio de Nash al menos para $R_j = 0.5$ y $R_i = 1$ ¹⁶

¹⁵Se utiliza como ejemplo a α_i pero el procedimiento es análogo para α_j

¹⁶Es extrapolable al resto de valores de R_i y R_j .

Como ya se adelantó en el apartado anterior, las guerras mixtas no garantizan la existencia del equilibrio de Nash en el espacio de estrategias puras. La no-existencia de equilibrio de Nash implica la no existencia de punto fijo para el map (53) i.e. que no exista punto de corte entre (53) y $\alpha_i = \alpha_i$ y $\alpha_j = \alpha_j$.

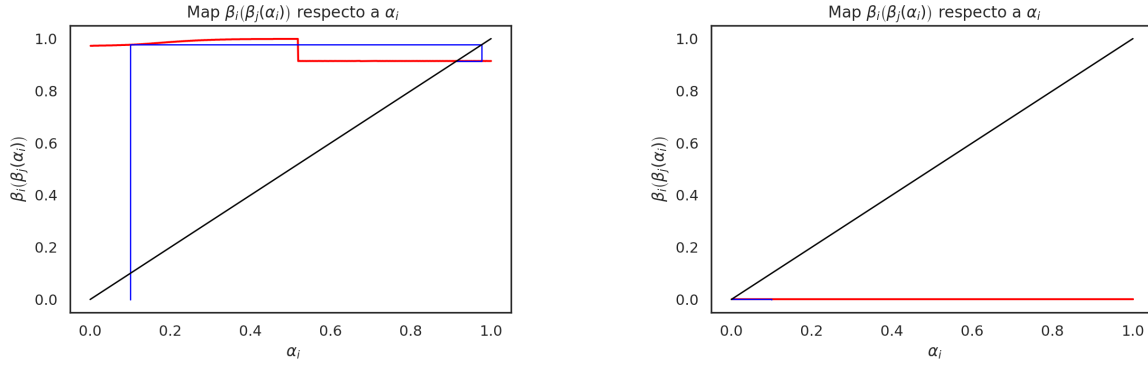


Figura 3.3: Diagrama cobweb realizado sobre el map representado en 3.2 que evidencia que el punto fijo es un atractor de (53), lo que equivale a ser atractor de (52) y, por lo tanto, un equilibrio de Nash. Todos los diagramas cobweb acaban convergiendo en el mismo punto fijo i.e. el equilibrio de Nash atrae a todas las órbitas del sistema.

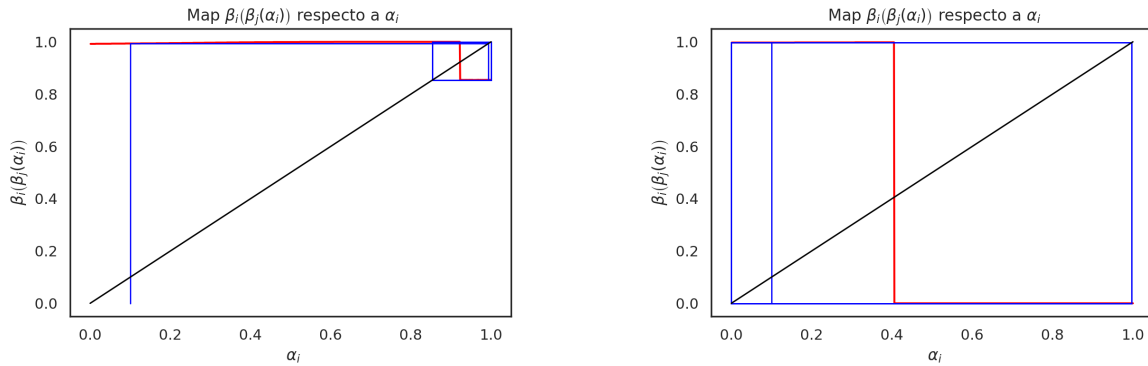


Figura 3.4: Representación gráfica del map y diagrama cobweb de (53) para $R_i = 1$, $R_j = 0.85$, $\gamma = 5$ y $\gamma' = 0.5$. La discontinuidad aparece como una caída vertical de la representación gráfica del map que impide que ésta y la recta de pendiente 1 se intersequen. En lugar de un punto fijo, aparece un ciclo límite de periodo 2

La desaparición del equilibrio de Nash es, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos, una bifurcación de doblamiento de periodo similar a la que presenta el map logístico [14] que transforma al punto fijo en un ciclo de periodo 2. Dicho ciclo pasa a ser el único atractor del sistema.

En términos de la dinámica que nuestro map implementa y ante la situación de una ausencia de equilibrio de Nash, un propietario totalmente racional que se enfrenta a otro propietario totalmente racional no pueden ni el uno ni el otro saber con certeza cuales son sus respectivas mejores respuestas. Esto se debe a la aparición del "gap" en la mejor respuesta del propietario con menos recursos. En términos menos técnicos, se puede decir que el equilibrio de Nash desaparece

a causa de la polarización de las mejores respuestas del propietario con menos recursos: O bien invierte todo al frente en el que se lucha con tecnología que recompensa al pobre o bien lo invierte todo al frente en el que se combate con tecnología que recompensa al rico.

En cualquier caso, para la guerra mixta con sistema de pagos B, la existencia del equilibrio de Nash viene determinada por los valores de γ , γ' y el cociente $\frac{R_j}{R_i}$, donde $R_j < R_i$, tal que

$$\frac{R_j}{R_{i_b}} \leq \frac{R_j}{R_i} < 1 \quad (55)$$

numéricamente pueden estimarse los valores de $\frac{R_j}{R_{i_b}}$ a los que, dados los γ y γ' del sistema, ocurre la bifurcación 3.5:

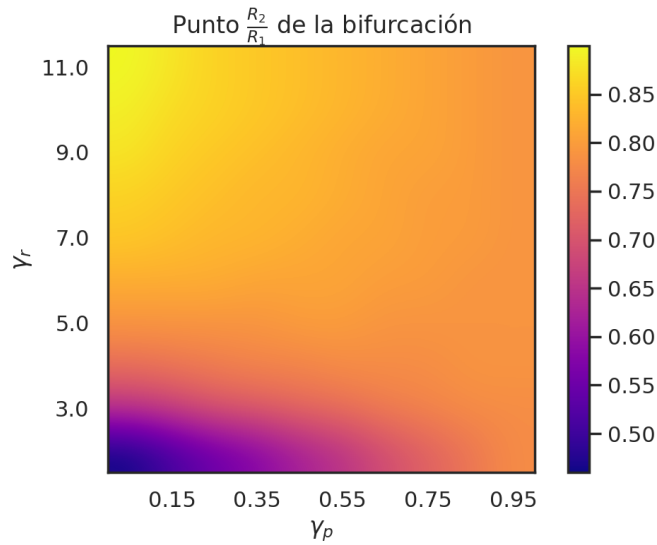


Figura 3.5: Valores de $\frac{R_j}{R_{i_b}}$ (representados mediante el código de color) para varias combinaciones de γ y γ' a partir del cual el equilibrio de Nash no existe. Para valores de $\gamma \approx 5$ y cuando γ' tiende a 1, los valores de $\frac{R_j}{R_{i_c}}$ para las distintas γ parecen converger a un punto entre 0.75 y 0.8. También es interesante que mientras que para valores bajos de γ el valor de $\frac{R_2}{R_1}$ crece con γ' , para valores de γ superiores a 6, $\frac{R_2}{R_1}$ decrece con γ' .

4. La guerra mixta en una red

En el apartado anterior se ha caracterizado el sistema dinámico que emerge de la combinación de tecnologías de guerra con sistema de pagos B considerando sólo la interacción entre dos propietarios. Sin embargo, lo verdaderamente interesante de estos modelos de guerra es determinar la evolución de una red de propietarios bajo su influencia.

4.1. Evolución de una red de propietarios bajo la guerra mixta con sistema de pagos B

Hay dos diferencias principales del algoritmo de evolución de nuestra red bajo la guerra mixta con respecto a la de Goyal.:

1. Los propietarios activos serán miopes en tanto en cuanto no planearán secuencias sino que decidirán su mejor contrincante batalla a batalla¹⁷.
2. En la guerra simple, un propietario activo o_i no emprenderá un batalla contra un propietario o_j cuando $u_i^B(R_i, R_j) < R_i$. En el caso de una guerra mixta, a este impedimento se le suma que puede no existir equilibrio de Nash i.e. dos propietarios entre los que no sea posible establecer un perfil de estrategias que sea un equilibrio de Nash, no lucharán.

Estas restricciones junto al proceso de conquista enunciado en [12] dan lugar al algoritmo representado mediante un diagrama de flujos en la figura 4.1 en el que es importante destacar que o_i y o_j no son dos propietarios concretos sino que se debe entender a o_i como el propietario con iniciativa de ataque y o_j como el propietario al que o_i elige o es susceptible de elegir como contrincante.

¹⁷La noción de secuencia de ataque aunque quizá posible de definir para la guerra de tipo B, requiere de considerar todas las redistribuciones posibles de recursos que se dan en cada posible batalla.

del algoritmo 4.1

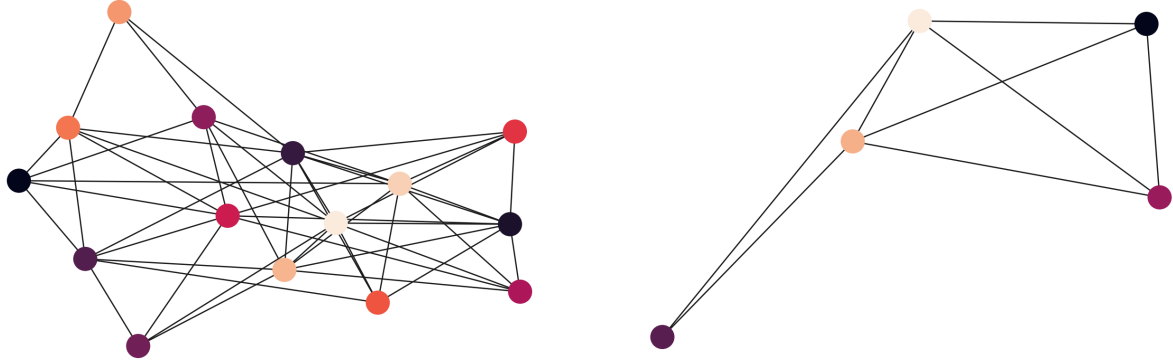


Figura 4.2: Topología de la red antes (izquierda) y después (derecha) de que se haya producido una guerra. Esta red ha sido generada disponiendo 15 nodos con probabilidad de conexión 0.5 entre ellos. En el transcurso del conflicto se han producido 10 conquistas dejando finalmente un cluster de 4 propietarios a dos de los cuales se une un propietario periférico.

Atendiendo ahora a la evolución de los recursos de los propietarios con cada batalla.

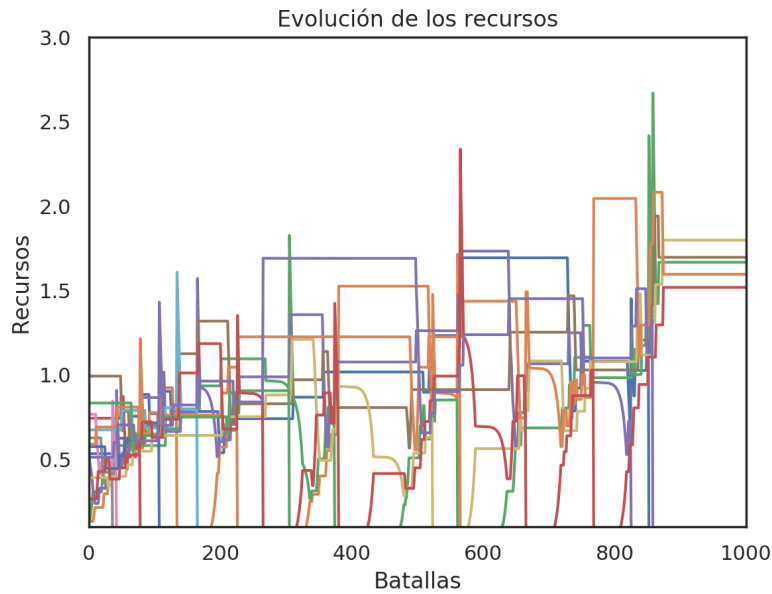


Figura 4.3: Evolución de los recursos de los propietarios en función del número de batallas en la red con topologías inicial y final mostradas en la figura 4.2, $\gamma = 5$ y $\gamma' = 0.5$. Los propietarios con cero recursos se consideran inactivos y no poseen un nodo en la red.

De 4.3 se pueden extraer varios rasgos característicos de la dinámica de la red:

- Cuando un propietario con un valor alto de recursos ataca a otro contendiente más pobre, éste maximiza el valor esperado de sus recursos tras la batalla propiciando que el propietario pobre invierta todos sus recursos en el frente RP. Como en el frente RP el que optimiza

los recursos esperados es quien invierte menos, el propietario más rico sigue esta estrategia aprovechando que el propietario más pobre no puede hacerle frente en RR. Sin embargo, aunque haciendo esto aumente el valor esperado de sus recursos, también disminuye su probabilidad de victoria en el frente PR y la fracción de recursos que allí invierte va a parar a manos del pobre.

- Al cabo de ~ 850 batallas, los propietarios dejan de batallar entre sí y los recursos permanecen estáticos. Esto recuerda a la paz perpetua que muestran algunas redes que operan únicamente con tecnologías que recompensan al pobre.
- En la situación de paz final, los recursos están mucho más igualados que al inicio.

La razón de este escenario de paz no tiene el mismo origen que en la guerra simple con tecnología que recompensa al pobre donde la paz se da porque ninguno de los propietarios encuentra beneficio alguno en seguir combatiendo, sino porque el desgaste sucesivo de los propietarios más ricos por parte de los más pobres acaba por hacer similares los recursos de uno de otro lo cuál conduce a la no existencia del equilibrio de Nash. Cuando no existe equilibrio de Nash para el enfrentamiento entre ninguna pareja de individuos activos, el conjunto de todos ellos nunca batalla ya que los propietarios son individuos totalmente racionales y en ausencia de equilibrio de Nash, un individuo totalmente racional no batalla.

Este resultado se ha producido en todas las realizaciones una colección de 100 experiencias en las que se hizo evolucionar una red dispersa de Erdos Renyi con $N = 25$ nodos originales, probabilidad de enlace $p = 0.3$ y distribución de recursos como la que aparece en (56) .

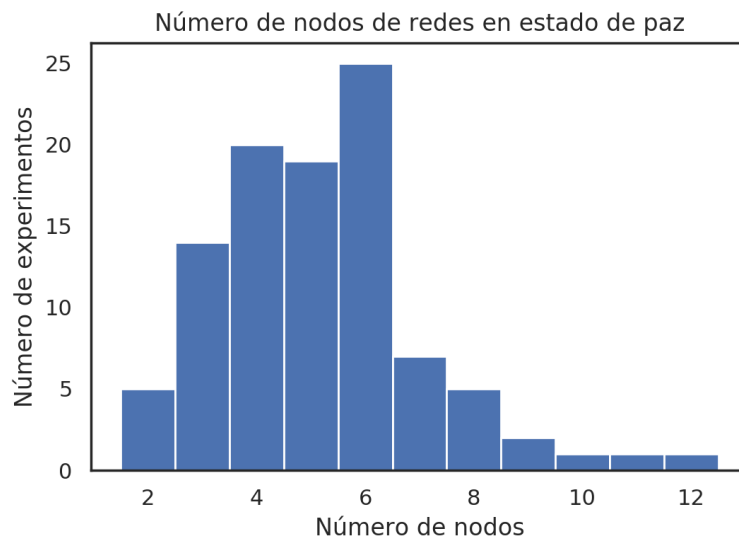


Figura 4.4: En este histograma se representa la cantidad de nodos que poseen las redes al final de su evolución. Todas ellas se encuentran en el régimen de paz inducido por la ausencia de equilibrio de Nash entre todos los contendientes activos.

Donde se comprueba que, casi en $\frac{1}{4}$ de los casos la configuración final tiene seis nodos.

5. Conclusiones y futuros pasos

En la sección 2.4 se han introducido los métodos de Monte Carlo como un acercamiento posible a una exploración numérica de las secuencias de ataque que optimizan la recompensa esperada independientemente del tipo de tecnología considerado. Sí que es cierto que aunque el simulated annealing es un método que se ha aplicado en problemas de optimización de naturaleza muy diversa [6], éste no se comporta correctamente en todas las situaciones. Descubrir sus limitaciones en este contexto queda como un futuro paso de las investigaciones en esta dirección.

De la combinación de dos tecnologías de guerra emerge la necesidad de decidir sobre la cantidad de recursos destinados a cada una de ellas conduce a la determinación del equilibrio de Nash. Se han considerado dos posibles escenarios: En el escenario A se vuelve a la situación inicial al menos que uno de los contendientes se alce victorioso con ambas tecnologías. En el escenario B, cada contendiente obtiene los recursos asignados a la tecnología con la que vence o a las dos, en caso de hacerlo con ambas.

En el escenario con sistema de pagos A, el equilibrio de Nash siempre existe y los dos contendientes emplean la misma fracción de recursos uno que otro. En el esquema de la conquista global de Goyal, en el que se repetirá el conflicto hasta que haya un ganador, el combate quedaría determinado por una función de Tullock cuyo exponente es la suma de los exponentes de las funciones empleadas.

En el escenario con sistema de pagos B, para dos tecnologías fijas, existe un rango de recursos relativos para los que no existe equilibrio de Nash. Si se asocia a esta situación la decisión de no iniciar la guerra, las simulaciones llevadas a cabo revelan la evolución hacia una situación asintótica en la que varios propietarios de recursos relativos relativamente cercanos permanecen en paz. En otras palabras, el sistema evoluciona hacia la inexistencia de equilibrio de Nash entre los contendientes supervivientes.

Es posible que de todos los puntos tocados en este trabajo, este último sea el de mayor interés. Caracterizar no sólo el número de nodos que restan tras alcanzar la paz producto de la ausencia de equilibrio de Nash sino la topología de la red que estos forman podría ser fruto de resultados muy interesantes.

Referencias

- [1] Alain Barrat, Marc Barthélemy, and Alessandro Vespignani. *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] Noam Nisan et al. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] Drew Fudenberg and Jean Tirole. *Game Theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1991.
- [4] Laura Hindersin, Bin Wu, Arne Traulsen, and Julián García. Computation and simulation of evolutionary game dynamics in finite populations. *Scientific Reports*, 9, 12 2019.
- [5] Shizuo Kakutani. A generalization of brouwer’s fixed point theorem. *Duke Math. J.*, 8(3):457–459, 09 1941.
- [6] David P. Landau and Kurt Binder. Monte carlo simulations at the periphery of physics and beyond, 2005.
- [7] Andreu Mas-Colell, Michael Whinston, and Jerry Green. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.
- [8] United Nations. Revision of world populations prospects, 2019.
- [9] Mark Newman. *Networks: an introduction*. Oxford university press, 2010.
- [10] Asu Ozdaglar. 6.254 : Game theory with engineering applications lecture 4: Strategic form games - solution concepts, 2010.
- [11] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in C (2Nd Ed.): The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1992.
- [12] Marcin Dziubinski Sanjeev Goyal and David E. N. Minarsch. The strategy of contest. Not published, 2018.
- [13] Stergios Skaperdas. Contest success functions. *Economic Theory*, 7(2):283–290, 1996.
- [14] S.H. Strogatz and M. Dichter. *Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd ed.* Studies in Nonlinearity. Avalon Publishing, 1994.